

## APROKSIMASI VARIASIONAL UNTUK SOLUSI SOLITON PADA PERSAMAAN SCHRÖDINGER NONLINIER DISKRIT NONLOKAL

GUSRIAN PUTRA\*, MAHDHIVAN SYAFWAN\*, HADI SUSANTO\*\*

*\*Program Studi Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*

*\*\*Department of Mathematics,  
Essex University,  
Wivenhoe Park, Colchester, CO4 3SQ, UK  
email : pgusrian@gmail.com*

**Abstrak.** Pada makalah ini dikaji persamaan Schrödinger nonlinier diskrit nonlokal (SNLD-N) yang menginterpolasi persamaan SNLD kubik nonlokal dan persamaan SNLD Ablowitz-Ladik nonlokal. Salah satu hal yang menarik dari persamaan ini adalah eksistensi solusi soliton yang dimilikinya. Solusi soliton pada persamaan SNLD-N ditentukan dengan menggunakan metode aproksimasi variasional (AV). Solusi AV yang diperoleh selanjutnya dibandingkan dengan solusi numerik. Hasil-hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa solusi AV valid dan mempunyai kesesuaian yang baik dengan solusi numerik.

*Kata Kunci:* Persamaan Schrödinger nonlinier diskrit (SNLD), soliton, aproksimasi variasional

### 1. Pendahuluan

Persamaan Schrödinger nonlinier diskrit (SNLD) merupakan model diskrit nonlinier yang paling fundamental karena persamaan ini mendeskripsikan banyak fenomena penting dalam berbagai bidang ilmu. Sebagai contoh, pada bidang optik, model ini menjelaskan perambatan sinar optik pada larik pandu gelombang nonlinier yang terbuat dari bahan *aluminium gallium arsenide* (AlGaAs) [6]. Contoh lain misalnya dalam bidang biologi dan fisika, persamaan SNLD menjelaskan sistem biofisika, kristal molekul dan rantai atom [2].

Bentuk umum dari model SNLD diberikan oleh [6]

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + F(\phi_{n+1}, \phi_n, \phi_{n-1}), \quad (1.1)$$

dimana  $\phi_n \equiv \phi_n(t) \in \mathbb{C}$  adalah fungsi gelombang pada waktu  $t \in \mathbb{R}^+$  dan *site*  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\dot{\phi}_n$  menyatakan turunan fungsi  $\phi_n$  terhadap  $t$ ,  $\varepsilon$  merepresentasikan konstanta pengikat (*coupling constant*) dan  $F$  merupakan suku nonlinier.

Salah satu hal yang menarik dari persamaan SNLD ini adalah eksistensi solusi soliton yang dimilikinya. Soliton sendiri adalah gelombang soliter (gelombang nonlinier terlokalisasi) yang memiliki sifat dapat mempertahankan bentuknya saat merambat pada kecepatan konstan, meskipun setelah berinteraksi dengan gelombang soliter lainnya [4].

Pada persamaan (1.1), suku nonlinier  $F$  mempunyai beberapa bentuk, diantaranya [6]:

(1) Model SNLD kubik:

$$F_{cub} = |\phi_n|^2 \phi_n. \quad (1.2)$$

(2) Model SNLD Ablowitz-Ladik (AL):

$$F_{AL} = \frac{1}{2} |\phi_n|^2 (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}). \quad (1.3)$$

(3) Model SNLD *saturable*:

$$F_{sat} = \frac{\phi_n}{1 + |\phi_n|^2}. \quad (1.4)$$

Persamaan SNLD dengan suku nonlinier kubik (1.2) dikenal sebagai persamaan yang *nonintegrable* (tidak dapat diselesaikan secara eksak) [6]. Pada tahun 1975-1976, Ablowitz dan Ladik [1] menunjukkan bahwa persamaan SNLD dengan suku nonlinier (1.3) adalah persamaan yang *integrable* (dapat diselesaikan secara eksak).

Salah satu metode yang sering digunakan dalam mengaproksimasi solusi persamaan *nonintegrable* adalah metode aproksimasi variasional (selanjutnya disingkat AV). Metode ini dikembangkan berdasarkan prinsip aksi terkecil (*least action*), atau dikenal juga dengan prinsip Hamilton, yang menyatakan bahwa persamaan gerak ditentukan oleh titik-titik kritis dari aksi (yaitu integral waktu dari Lagrangian) [7].

Lebih lanjut, jika  $|\phi_n|^2$  diganti dengan  $\phi_n \phi_{-n}^*$ , dimana tanda \* menyatakan kompleks konjugat, maka suku nonlinier yang dihasilkan disebut suku nonlinier nonlokal. Dengan demikian persamaan SNLD kubik nonlokal diberikan oleh

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + \phi_n^2 \phi_{-n}^*, \quad (1.5)$$

sedangkan persamaan SNLD AL nonlokal diberikan oleh

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + \frac{1}{2} \phi_n \phi_{-n}^* (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}). \quad (1.6)$$

Pada makalah ini akan ditinjau persamaan berikut:

$$i\dot{\phi}_n = \varepsilon(\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) + \frac{\alpha}{2} \phi_n \phi_{-n}^* (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) + (1 - \alpha) \phi_n^2 \phi_{-n}^*. \quad (1.7)$$

Persamaan (1.7) dapat dipandang sebagai persamaan yang menginterpolasi model SNLD kubik nonlokal (1.5) pada saat  $\alpha = 0$  dan model SNLD AL nonlokal (1.6) pada saat  $\alpha = 1$ . Selanjutnya persamaan (1.7) disebut persamaan Schrödinger nonlinier diskrit nonlokal atau disingkat persamaan SNLD-N.

## 2. Formulasi Metode Variasional

Pada subbab ini akan diuraikan formulasi metode aproksimasi variasional yang merujuk dari referensi [3]. Misalkan  $u(x, t)$  dengan  $t \geq 0$  dan untuk setiap  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$  memenuhi persamaan diferensial parsial

$$u_t = f_V(x, u, u_x, u_{xx}) + f_{NV}(x, u, u_x, u_{xx}), \quad (2.1)$$

dimana  $f_V$  menyatakan suku variasional dan  $f_{NV}$  menyatakan suku nonvariasional. Untuk suku variasional, terdapat suatu fungsi  $F(x, u, u_x)$  sedemikian sehingga berlaku

$$f_V(x, u, u_x, u_{xx}) = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_x}. \quad (2.2)$$

Dengan mengasumsikan bahwa  $f_{NV} \equiv 0$ , maka solusi stasioner untuk persamaan (2.1) merupakan nilai ekstrim dari fungsional

$$L = \int_{\Omega} -F(x, u, u_x) dx. \quad (2.3)$$

Misalkan solusi variasional dapat ditulis dalam bentuk  $u = U(x, A_1, \dots, A_n)$  dengan sejumlah hingga parameter  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Hasil integrasi (2.3) dengan menggunakan solusi variasional tersebut dinamakan Lagrangian efektif ( $L_{\text{eff}}$ ). Dengan demikian nilai ekstrim untuk Lagrangian efektif memenuhi

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial A_i} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial F}{\partial u} \right] dx = 0, \quad (2.4)$$

dimana  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Misalkan sekarang parameter  $A_i$  merupakan suatu fungsi yang bergantung terhadap waktu, dinotasikan sebagai  $A_i(t)$ . Dengan demikian dari persamaan (2.2) diperoleh hubungan

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial A_j} \dot{A}_j - f_{NV}(x, U, U_x, U_{xx}), \quad (2.5)$$

dimana  $\dot{A}_j \equiv dA_j/dt$ . Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.5) ke persamaan (2.4), maka untuk setiap  $i$  diperoleh

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial A_i} \left[ f_{NV} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial A_j} \dot{A}_j \right]. \quad (2.6)$$

Dengan memisalkan

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial A_i} \frac{\partial U}{\partial A_j} dx, \quad (2.7)$$

maka persamaan (2.6) dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{j=1}^N M_{ij} \dot{A}_j = -\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A_i} + \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial A_i} f_{NV} dx. \quad (2.8)$$

Untuk sistem diskrit, persamaan (2.8) dapat ditulis menjadi

$$\sum_{j=1}^N M_{ij} \dot{A}_j = -\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial A_i} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial A_i} f_{NV}. \quad (2.9)$$

Berikut langkah-langkah sistematis dari metode AV [5] :

(1) Rumuskan Lagrangian dari persamaan yang akan ditinjau

- (2) Pilih sebuah fungsi penduga (ansatz) yang sesuai dan memuat sejumlah hingga parameter (disebut sebagai parameter variasional)
- (3) Substitusikan fungsi ansatz yang dipilih ke Lagrangian dan selesaikan penjumlahannya (untuk sistem diskrit) atau integrasinya (untuk sistem kontinu)
- (4) Tentukan titik-titik kritis dari parameter variasional dengan menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange.

### 3. Aproksimasi Variasional pada Persamaan SNLD-N

Karena  $\phi_n(t)$  merupakan fungsi yang bergantung terhadap waktu  $t$  dan site  $n$ , maka dengan melakukan pemisahan variabel,  $\phi_n(t)$  dapat ditulis dalam bentuk

$$\phi_n(t) = Q_n e^{it}, \quad (3.1)$$

dimana  $Q_n$  adalah fungsi yang tidak bergantung waktu. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) ke dalam (1.7), diperoleh

$$\varepsilon(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1}) - Q_n + \frac{\alpha}{2} Q_n Q_{-n}^* (Q_{n+1} + Q_{n-1}) + (1 - \alpha) Q_n^2 Q_{-n}^* = 0. \quad (3.2)$$

Karena pada makalah ini hanya ditinjau solusi yang bernilai riil, maka persamaan (3.2) dapat ditulis

$$\varepsilon(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1}) - Q_n + \frac{\alpha}{2} Q_n Q_{-n} (Q_{n+1} + Q_{n-1}) + (1 - \alpha) Q_n^2 Q_{-n} = 0. \quad (3.3)$$

Perhatikan bahwa persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai berikut :

$$f_V + f_{NV} = 0, \quad (3.4)$$

dimana

$$f_V = \varepsilon(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1}) - Q_n, \quad (3.5)$$

dan

$$f_{NV} = \frac{\alpha}{2} Q_n Q_{-n} (Q_{n+1} + Q_{n-1}) + (1 - \alpha) Q_n^2 Q_{-n}. \quad (3.6)$$

Sebagai langkah pertama dalam metode AV, rumuskan terlebih dahulu Lagrangian dari sistem (3.5). Lagrangian yang dimaksud adalah

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} - \left( \varepsilon Q_{n-1} Q_n - \frac{1}{2} (1 + 2\varepsilon) Q_n^2 \right). \quad (3.7)$$

Langkah berikutnya adalah memilih fungsi ansatz yang sesuai. Pada makalah ini akan ditentukan hampiran solusi soliton *onsite*, yaitu solusi soliton yang memiliki nilai maksimum pada satu *site*, maka dapat dipilih fungsi ansatz berikut:

$$Q_n = \begin{cases} A e^{-|n|^a}, & n \leq -1, \\ B, & n = 0, \\ C e^{-|n|^a}, & n \geq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

dimana  $A, B, C$  dan  $a$  adalah parameter-parameter variasional yang bernilai riil.

Selanjutnya substitusikan ansatz (3.8) ke persamaan (3.7) dan selesaikan bentuk penjumlahannya maka diperoleh Lagrangian efektif

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{(A^2 + C^2)(2e^{-a}\varepsilon - 2\varepsilon - 1)}{e^{2a} - 1} + B \left( e^{-a}\varepsilon(A + C) - B\varepsilon - \frac{B}{2} \right). \quad (3.9)$$

Dengan mensubstitusikan Lagrangian efektif (3.9), ansatz pada persamaan (3.8) dan persamaan nonvariasional (3.6) ke persamaan (2.9) maka diperoleh sistem persamaan

$$A_1 + A_2 = 0, \quad (3.10)$$

$$B_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$C_1 + C_2 = 0, \quad (3.12)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad (3.13)$$

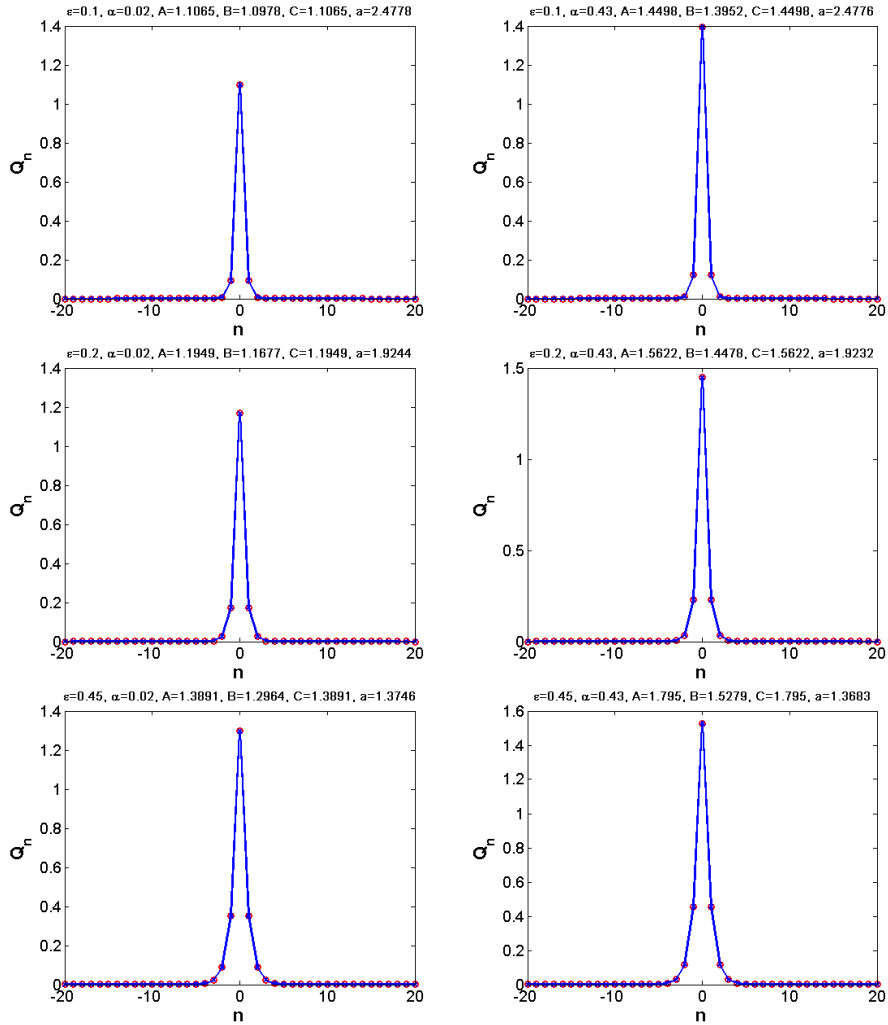
dimana

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{ACe^{-4a}((Ae^{-3a} - Be^{-3a} + Ae^{-a} + Be^a - 2A)\alpha + 2A)}{2(e^{-4a} - 1)}, \\ A_2 &= \frac{A(2e^{-a}\varepsilon - 2\varepsilon - 1)}{e^{2a} - 1} + Be^{-a}\varepsilon, \\ B_1 &= e^{-a}\varepsilon(A + C) - B(2\varepsilon + 1) + \frac{1}{2}\alpha B^2(A + C)e^{-a} + (1 - \alpha)B^3, \\ C_1 &= -\frac{ACe^{-4a}((Ce^{-3a} - Be^{-3a} + Ce^{-a} + Be^a - 2C)\alpha + 2A)}{2(e^{-4a} - 1)}, \\ C_2 &= \frac{C(2e^{-a}\varepsilon - 2\varepsilon - 1)}{e^{2a} - 1} + Be^{-a}\varepsilon, \\ a_1 &= -\frac{(A^2 + C^2)e^{-a}\varepsilon}{e^{2a} - 1} - \frac{(A^2 + C^2)(2e^{-a}\varepsilon - 2\varepsilon - 1)}{(e^{2a} - 1)^2} - Be^{-a}\varepsilon(A + C), \\ a_2 &= -\frac{(A^3C + AC^3)((2e^{-a} - e^{-3a} + 2e^a - e^{-5a})\alpha + (2e^{-4a} + 4)(\alpha - 1))}{2(e^{4a} - 1)^2}, \\ a_3 &= -\frac{1}{2}ACe^{-4a}((A^2 + C^2)(e^{-a}\alpha - 2\alpha + 2) + Be^a\alpha(A + C)). \end{aligned}$$

Dikarenakan kompleksitas perhitungannya, maka solusi nilai parameter  $A, B, C$  dan  $a$  untuk  $\varepsilon$  dan  $\alpha$  yang diberikan dapat ditentukan secara numerik dengan menggunakan metode Newton-Raphson.

#### 4. Perbandingan Hasil Aproksimasi Variasional dengan Hasil Numerik

Pada bagian ini, hasil-hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode AV akan dibandingkan dengan hasil-hasil numerik. Dalam hal ini, solusi numerik untuk soliton onsite pada persamaan (3.3) dapat ditentukan dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Perhitungan numerik ini dilakukan pada domain  $n \in [-N, N]$ , dengan  $N \in \mathbb{Z}$  yang cukup besar. Karena solusi soliton mempunyai ekor yang asimtotik ke nol, maka pada skema numerik digunakan syarat batas  $Q_{\pm(N+1)} = Q_{\pm(N)}$ .



Gambar 1. Perbandingan solusi soliton *onsite* yang diperoleh secara numerik (garis-bulat) dengan aproksimasi variasional (garis-silang) untuk beberapa nilai  $\varepsilon$  dan  $\alpha$ .

Sebagai tebakan awal, digunakan solusi soliton eksak ketika  $\varepsilon = 0$ . Solusi ini kemudian dilanjutkan secara numerik untuk  $\varepsilon \neq 0$ .

Sebagai contoh ilustrasi, pada Gambar 1 diperlihatkan perbandingan antara dua solusi soliton *onsite* yang diperoleh dari perhitungan numerik dan aproksimasi variasional untuk nilai parameter  $\alpha = 0, 02; 0, 43$  dan tiga nilai konstanta pengikat  $\varepsilon = 0, 1; 0, 2; 0, 45$ . Pada gambar tersebut juga ditampilkan solusi nilai-nilai parameter varasional  $A, B, C$  dan  $a$  yang diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan (3.10-3.13) secara numerik untuk nilai  $\varepsilon$  dan  $\alpha$  yang diberikan. Dari gambar dapat dilihat hampiran solusi soliton AV dengan solusi numerik memiliki kesesuaian yang sangat bagus untuk beberapa nilai parameter  $\alpha$  dan  $\varepsilon$ .

## 5. Kesimpulan

Hasil aproksimasi variasional (AV) yang dikembangkan untuk solusi soliton *onsite* pada makalah ini sangat baik dalam menghampiri solusi yang diperoleh secara numerik untuk  $\varepsilon$  dan  $\alpha$  yang semakin kecil.

## 6. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Admi Nazra, Narwen, M.Si dan Dr. Haripamyu yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

- [1] Ablowitz, M. J and J. F. Ladik. 1976. Nonlinear differential-difference equations. *J. Math. Phys.* **16**: 598
- [2] Ablowitz, M. J and Z.H. Muslimani. 2014. Integrable discrete PT symmetric model. *Phys. Rev. E.* **90**: 032912
- [3] Dawes, J. H. P and H. Susanto. 2013. Variational approximation and the use of collective coordinates. *Phys. Rev. E.* **87**: 063202
- [4] Drazin, P. G. 1989. *Soliton: An Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge
- [5] Kaup, D. J and T. K. Vogel. 2007. Quantitative measurement of variational approximations. *Phys. Lett. A.* **362**: 289
- [6] Kevrekidis, P.G. 2009. *Discrete Nonlinear Schrödinger Equation: Mathematical Analysis, Numerical Computations and Physical Perspectives*. Springer, Berlin
- [7] Wattis, J. A. D. 1994. Variational approximations to breather modes in the discrete sine-Gordon equation. *Phys. D.* **82**: 333 – 339