**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 197, № 1
октябрь, 2018**

© **2018 г. Г. Г. Граховски*, А. Ж. Мохаммед*, Х. Сусанто***

НЕЛОКАЛЬНЫЕ РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ АБЛОВИЦА–ЛАДИКА

Цель данной работы – построить обратное преобразование рассеяния для нелокального полудискретного нелинейного уравнения Шредингера (известного как уравнение Абловица–Ладика) с $\mathcal{PT}$-симметрией, т. е. получить собственные функции (решения Йоста) для ассоциированной пары Лакса, данные рассеяния и фундаментальные аналитические решения. Изучаются спектральные свойства ассоциированного дискретного оператора Лакса. Одно- и двухсолитонные решения нелокального уравнения Абловица–Ладика выводятся на основе сформулированной (аддитивной) задачи Римана–Гильберта. Доказывается отношение полноты для ассоциированных решений Йоста, и на этой основе выводится формула разложения на полном множестве решений Йоста, что позволяет интерпретировать обратное преобразование рассеяния как обобщенное преобразование Фурье.

Ключевые слова: интегрируемые системы, солитон, задача Римана–Гильберта, нелокальные редукции.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9506

1. ВВЕДЕНИЕ

Вполне интегрируемые бесконечномерные системы постоянно привлекают внимание ученых в различных областях математики и физики на протяжении последних почти пятидесяти лет [1]–[3] и изучаются в широком диапазоне приложений – от дифференциальной геометрии до классической и квантовой теории поля, механики жидкостей и оптики.

Специальный класс вполне интегрируемых бесконечномерных систем – это класс дифференциальных уравнений с частными производными, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [1], [3]. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iq_t + q_{xx} + 2|q^2|q = 0, \qquad q = q(x,t), \tag{1}$$

появилось на самом раннем этапе развития МОЗР [1], [3], [4] как один из классических примеров уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР, и сразу же привлекло

*Department of Mathematical Sciences, University of Essex, Colchester, UK.
E-mail: grah@essex.ac.uk, ajmoha@essex.ac.uk, hsusanto@essex.ac.uk

пристальное внимание ученых [5]–[7]. Оно оказалось универсальной моделью для изучения слабонелинейных дисперсионных волн, нелинейной оптики и физики плазмы [8].

Обобщения НУШ приводились в нескольких направлениях. Сначала возникли многокомпонентные обобщения. Первое многокомпонентное (векторное) обобщение уравнения (1)

$$i\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_{xx} + 2(\mathbf{v}^\dagger, \mathbf{v})\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t), \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ – n-компонентный комплекснозначный вектор, $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – стандартное скалярное произведение, было предложено Манаковым в 1974 году [3]. Это уравнение также интегрируемо с помощью МОЗР [1]–[3], [8]. Двухкомпонентное векторное НУШ (известное как модель Манакова) возникает при изучении электромагнитных волн в оптических средах. Другое направление, мотивированное применением методов дифференциальной геометрии и алгебры Ли для получения солитонных решений уравнений [9]–[18] (более подробное изложение можно найти, например, в [2]), привело к открытию тесной связи между многокомпонентными (матричными) НУШ и однородными и симметричными пространствами [15].

Первая интегрируемая дискретизация НУШ (1) была предложена Абловицем и Ладиком в виде [19]–[21]

$$iQ_{n,t} = \frac{1}{h^2}(Q_{n+1} - 2Q_{n+1} + Q_{n-1}) - \epsilon|Q_n|^2(Q_{n+1} + Q_{n-1})), \qquad \epsilon = \pm 1. \tag{3}$$

Это дифференциально-разностное или полудискретное уравнение (дискретное относительно пространства и непрерывное относительно времени), которое фактически является конечно-разностной $O(h^2)$-аппроксимацией уравнения (1). Соответствующая задача рассеяния обычно называется задачей рассеяния Абловица–Ладика [8], [22]–[28]. Уравнение (3) также имеет ряд физических приложений, а именно: оно описывает динамику ангармонических решеток [29], самозахват на димерах [30], различные типы спиновых цепочек Гейзенберга [31], [32] и т. д. Позднее изучались различные дискретизации НУШ [5], [33]–[38] с эффектами возмущений [39], [40].

Недавно в работах [41], [42] было предложено нелокальное интегрируемое уравнение типа НУШ, обладающее $\mathcal{PT}$-симметрией в силу инвариантности так называемого самоиндуцированного потенциала $V(x,t) = \psi(x,t)\psi^*(-x,-t)$ относительно объединенного действия симметрий четности и обращения времени. Там же было получено односолитонное решение для этой модели и показано, что в нем возникают особенности за конечное время. Вскоре после этого были найдены нелокальные $\mathcal{PT}$-симметричные обобщения модели Абловица–Ладика в работе [43]. Все эти модели интегрируемы с помощью МОЗР [44].

Нелокальные редукции НУШ (1) и уравнения Абловица–Ладика (3) представляют значительный интерес для приложений в $\mathcal{PT}$-симметричной оптике, особенно для развития теории электромагнитных волн в искусственных гетерогенных средах [45], [46]. Обзор современных результатов можно найти, например, в работах [47], [48].

Первоначально внимание к таким системам возникло в квантовой механике (см. [49], [50]). В работе [49] было показано, что квантовые системы с неэрмитовым гамильтонианом допускают состояния с действительными собственными значениями, т. е. эрмитовость гамильтониана не является необходимым условием существования действительного спектра. С помощью таких гамильтонианов можно построить новую квантовую механику [49]–[52]. Отправной точкой будет тот факт, что в случае неэрмитова гамильтониана с действительным спектром модуль волновой функции собственных состояний не зависит от времени даже в случае комплексных потенциалов.

Исторически первый псевдоэрмитов гамильтониан с действительным спектром – это $\mathcal{PT}$-симметричный гамильтониан в работах [49], [53], [54]. Здесь псевдоэрмитовость означает, что гамильтониан $\mathcal{H}$ коммутирует с операторами пространственного отражения $\mathcal{P}$ и обращения времени $\mathcal{T}$, т. е. $\mathcal{PTH} = \mathcal{HPT}$. Эти операторы действуют следующим образом: $\mathcal{P}$: $x \to -x$ и $\mathcal{T}$: $t \to -t$. Если волновая функция скалярна, это приводит к следующему действию оператора пространственного отражения на пространстве состояний: $\mathcal{P}\psi(x,t) = \psi(-x,t)$ и $\mathcal{T}\psi(x,t) = \psi^*(x,-t)$. В результате гамильтониан и волновая функция $\mathcal{PT}$-симметричны, если $\mathcal{H}(x,t) = \mathcal{H}^*(-x,-t)$ и $\psi(x,t) = \psi^*(-x,-t)$. Здесь также учтено то обстоятельство, что оператор четности $\mathcal{P}$ линейный и унитарный, тогда как оператор обращения времени $\mathcal{T}$ антилинейный и антиунитарный.

Действие операторов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{T}$ на гамильтониан приводит к действию на ассоциированную задачу рассеяния (см. (6)) и ее потенциал (8):

$$\mathcal{P}Q_n(t) = Q_{-n}(t), \qquad \mathcal{T}Q_n(t) = Q_n^*(-t).$$

Это приводит к условию редукции (симметрии)

$$Q_n^-(t) = \pm(Q^+)^*_{-n}(t). \tag{4}$$

В результате получается нелокальное уравнение Абловица–Ладика с $\mathcal{PT}$-симметрией [43]

$$iQ^+_{n,\tau} = (Q^+_{n+1} - 2Q^+_n + Q^+_{n-1}) - \epsilon Q^+_n (Q^+)^*_{-n}(Q^+_{n+1} + Q^+_{n-1}). \tag{5}$$

Цель данной работы – построить обратное преобразование рассеяния для уравнения (5), изучить спектральные свойства ассоциированных операторов Лакса (6) и (7) и получить одно- и двухсолитонные решения.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко описывается структура полудискретного представления Лакса, соответствующего полудискретного (дифференциально-разностного) уравнения с нулевой кривизной и полученных дифференциально-разностных уравнений. В разделе 3 представлено прямое преобразование рассеяния для нелокального уравнения Абловица–Ладика, включающее решения Йоста, матрицу рассеяния и данные рассеяния, и фундаментальные аналитические решения. В разделе 4 сформулирована задача Римана–Гильберта (в аддитивной форме) для фундаментальных аналитических решений на непрерывном спектре дискретного оператора Лакса. На этой основе выведены одно- и двухсолитонные решения уравнения (5). Наконец, в разделе 5 описаны спектральные свойства дискретного оператора Лакса, доказано отношение полноты для решений Йоста и получена формула разложения на полном множестве решений Йоста.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начнем с полудискретного аналога представления Лакса (или представления нулевой кривизны), т. е. представим начальное нелинейное эволюционное уравнение (3) как условие совместимости двух линейных систем:

$$\Psi_{n+1}(z,t) = L_n(z,t)\Psi_n(z,t), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\Psi_{n,t}(z,t) = M_n(z,t)\Psi_n(z,t), \tag{7}$$

где

$$L_n(z,t) = \begin{pmatrix} z & Q_n^+(t) \\ Q_n^-(t) & z^{-1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

– элемент группы Ли $SL(2,\mathbb{C})$, $M_n(z,t)$ – элемент соответствующей алгебры Ли $sl(2,\mathbb{C})$. Здесь также предполагается, что $Q_n^\pm(t)$ – комплекснозначные функции такие, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n^\pm(t) < \infty$. Условие совместимости (т. е. полудискретный аналог представления нулевой кривизны) для уравнений (6) и (7) имеет вид

$$M_{n+1} = L_{n,t}L_n^{-1} + L_n M_n L_n^{-1}, \tag{9}$$

где оператор M_n представлен в виде $M_n(z,t) = V_n(z,t) + \Omega(z)$ и

$$V_n(z,t) = i\begin{pmatrix} Q_n^+Q_{n-1}^- & -(z^{-1}Q_{n-1}^+ - zQ_n^+) \\ -(z^{-1}Q_n^- - zQ_{n-1}^-) & -Q_n^-Q_{n-1}^+ \end{pmatrix}, \qquad \Omega = -\frac{i}{2}(z-z^{-1})^2\sigma_3. \tag{10}$$

Уравнение (3) вместе с соответствующими граничными условиями интегрируемо с помощью МОЗР [19]–[21]. Кроме того, уравнение (3) является одним из членов интегрируемой иерархии, ассоциированной со спектральной задачей (6).

Дискретное условие совместимости (9) приводит к системе дифференциально-разностных уравнений (без применения инволюции)

$$\begin{aligned} iQ_{n,\tau}^+ &= (Q_{n+1}^+ - 2Q_n^+ + Q_{n-1}^+) - Q_n^+Q_n^-(Q_{n+1}^+ + Q_{n-1}^+), \\ -iQ_{n,\tau}^- &= (Q_{n+1}^- - 2Q_n^- + Q_{n-1}^-) - Q_n^-Q_n^+(Q_{n+1}^- + Q_{n-1}^-). \end{aligned} \tag{11}$$

При применении стандартного условия симметрии (инволюции) $Q_n^-(t) = \epsilon(Q_n^+(t))^*$ получается уравнение (3). При использовании нелокальной инволюции $Q_n^-(t) = \epsilon(Q_{-n}^+(t))^*$ получается уравнение (5).

Наконец, заметим, что оператор Лакса–Абловица–Ладика $L_n(z)$ можно преобразовать в спектральную задачу (задачу на собственные значения) $\mathcal{L}_n(z)\Psi_n(z) = 0$, где

$$\mathcal{L}_n(z) = \begin{pmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{pmatrix} + U_n - z\mathbb{I}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} 0 & Q_n^+ \\ Q_{n-1}^- & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь $D_\pm$ – операторы сдвига $D_\pm\Psi_n(z) = \Psi_{n\pm1}(z)$, $\mathbb{I}$ – единичная (2×2)-матрица [25], [26].

Спектральная задача (12) и базовая дифференциально-разностная система (8) удовлетворяют условию симметрии

$$\mathbf{C}[L_n(z)] := BL_{-n}(z^*)^\dagger B^{-1} = L_n(z), \tag{13}$$

где $\mathbf{C}$ – автоморфизм группы Ли $SL(2,\mathbb{C})$. В частности, выбор $B = \mathrm{diag}(1,-1)$ для реализации $\mathbf{C}$ дает $Q_n^-(t) = \epsilon(Q_n^+(t))^*$. Таким образом, потенциалы U_n (12) и V_n (10) принимают вид

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & Q_n^+ \\ \epsilon(Q_{n-1}^+(t))^* & 0 \end{pmatrix},$$
$$V_n(z,t) = i\begin{pmatrix} -\epsilon Q_n^+(Q_{1-n}^+)^* & -(z^{-1}Q_{n-1}^+ + zQ_n^+) \\ \epsilon(z^{-1}(Q_{-n}^+)^* - z(Q_{1-n}^+)^*) & \epsilon(Q_{-n}^+)^*Q_{n-1}^+ \end{pmatrix}.$$

В результате базовая система (11) сводится к (5).

3. ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАССЕЯНИЯ

3.1. Решения Йоста и данные рассеяния. Собственные функции операторов $L_n(z)$ и $M_n(z)$ систем (6), (7) определяются своими асимптотиками (так называемыми решениями Йоста) при $|n| \to \infty$ (см., например, [1]–[3]):

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &\to \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \\ \phi_n(z) &\to \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad n \to -\infty. \end{aligned} \tag{14}$$

Наряду со стандартными решениями Йоста можно определить “ренормализованные” решения Йоста по функциям $\psi_n(z)$, $\phi_n(z)$, удовлетворяющим задаче рассеяния (6):

$$\xi_n(z) = \psi_n(z)\mathbf{Z}^{-n}, \qquad \varphi_n(z) = \phi_n(z)\mathbf{Z}^{-n}, \tag{15}$$

где $\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ и собственные функции ξ_n, φ_n являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений

$$\xi_{n+1} = (\mathbf{Z} + \widetilde{\mathbf{Q}}_n)\xi_n\mathbf{Z}^{-1}, \qquad \varphi_{n+1} = (\mathbf{Z} + \widetilde{\mathbf{Q}}_n)\varphi_n\mathbf{Z}^{-1}, \tag{16}$$

где $\widetilde{\mathbf{Q}}_n = \begin{pmatrix} 0 & Q_n^+ \\ Q_n^- & 0 \end{pmatrix}$ с каноническими граничными условиями

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n(z) = \mathbb{I}, \qquad \lim_{n\to-\infty} \varphi_n(z) = \mathbb{I}. \tag{17}$$

Два решения Йоста $\phi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ связаны матрицей рассеяния:

$$\phi_n(z) = \psi_n(z)T(z), \qquad T(z) = \begin{pmatrix} a^+(z) & -b^-(z) \\ b^+(z) & a^-(z) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Нелокальная инволюция (13) индуцирует условие симметрии как решения Йоста, ассоциированные с (8), и принимает вид

$$\mathbf{C}(\psi_{-n}^\dagger((z)^*,t)) = B\psi_{-n}^\dagger((z)^*,t)B^{-1} = \phi_n(z,t). \tag{19}$$

3.2. Фундаментальные аналитические решения. Фундаментальные аналитические решения $\chi^{\pm}(x,t,\lambda)$ являются важным инструментом сведения обратной задачи рассеяния к задаче Римана–Гильберта. Построение таких решений основано на разложении Гаусса матрицы $T(\lambda,t)$ (см. [3], [55], [56]):

$$\begin{aligned} \chi_n^+(z) &= \psi_n(z)T^-(z) = \phi_n(z)S^+(z), \\ \chi_n^-(z) &= \psi_n(z)T^+(z) = \phi_n(z)S^-(z), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} T^-(z) &= \begin{pmatrix} a^+(z) & 0 \\ b^+(z) & 1 \end{pmatrix}, \qquad & T^+(z) &= \begin{pmatrix} 1 & -b^-(z) \\ 0 & a^-(z) \end{pmatrix}, \\ S^+(z) &= \begin{pmatrix} 1 & \beta^-(z) \\ 0 & \alpha^+(z) \end{pmatrix}, \qquad & S^-(z) &= \begin{pmatrix} \alpha^-(z) & 0 \\ -\beta^+(z) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

– сомножители в разложении Гаусса ассоциированной матрицы рассеяния $T(z)$:

$$T(z) = T^-(z)\widehat{S}^+(z) = T^+(z)\widehat{S}^-(z).$$

Они выражаются через матричные элементы матрицы рассеяния $T(z)$ и ее обратной матрицы

$$\widehat{T}(z) = \begin{pmatrix} \alpha^-(z) & \beta^-(z) \\ -\beta^+(z) & \alpha^+(z) \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Эта конструкция гарантирует, что $\xi^{\pm}(z)$ – аналитические функции от z при $z \in \Omega_{\pm}$.

На единичной окружности $|z| = 1$ (т. е. на непрерывном спектре оператора $L_n(z)$) два фундаментальных аналитических решения являются линейно зависимыми:

$$\widetilde{\chi}_n^+(z) - \widetilde{\chi}_n^-(z) = \widetilde{\chi}_n^-(z)\mathbf{G}_n(z), \qquad |z| = 1, \tag{23}$$

где сшивающая функция $\mathbf{G}_n(z,t)$ выражается через $\rho^{\pm}(t,z)$:

$$\mathbf{G}_n(z,t) = \begin{pmatrix} \rho^+\rho^- & z^{2n}\rho^- \\ z^{-2n}\rho^+ & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\chi}_n^-(z) \to \mathbb{I} \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{24}$$

Независимые матричные элементы матрицы $\mathbf{G}_n(z,t)$ вместе с дискретным спектром оператора $L_n(z)$ образуют минимальное множество данных рассеяния для L_n.

Нелокальная инволюция (13) индуцирует условие симметрии на фундаментальные аналитические решения и матрицу рассеяния следующим образом:

$$\mathbf{C}(\chi_{-n}^{\{-,\dagger\}}((z)^*,t)) = B\chi_{-n}^{\{-,\dagger\}}((z)^*,t)B^{-1} = \chi_n^+(z,t) \tag{25}$$

и

$$\mathbf{C}(T^{\dagger}((z)^*,t)) = BT^{\dagger}((z)^*,t)B^{-1}. \tag{26}$$

В результате получаем

$$a^{\pm}(z,t) = (a^{\pm}(z^*,t))^*, \qquad b^{\pm}(z,t) = (b^{\mp}(z^*,t))^*. \tag{27}$$

3.3. Асимптотическое поведение фундаментальных аналитических решений. До конца данного раздела предполагается, что инволюция (13) верна.

3.3.1. *Асимптотическое поведение фундаментальных аналитических решений при* $|z| = 1$. Дискретная задача рассеяния (6) может иметь дискретные собственные значения. Это может происходить при $a^{\pm}(z_j) = 0$ для некоторого z_j. Здесь предполагается, что это не может иметь место на непрерывном спектре. В нулях z_j функций $a^{\pm}(z)$ два решения Йоста становятся пропорциональными:

$$\varphi_n^{\pm}(z_j) = \pm b_j^{\pm} z_j^{\mp 2n} \xi_n^{\pm}(z_j). \tag{28}$$

Предположим, что $a^+(z)$ имеет S простых нулей $\{z_j\colon |z_j| > 1\}_{j=1}^S$ и $a^-(z)$ имеет S простых нулей $\{z_j\colon |z_j| < 1\}_{j=1}^S$, т. е. число нулей внутри единичной окружности равно числу нулей вне единичной окружности. Тогда в силу (28) имеем

$$\operatorname{Res}(\widetilde{\varphi}_n^{\pm}, z_j^{\pm}) = \frac{\varphi_n^{\pm}(z_j^{\pm})}{\dot{a}^{\pm}(z_j^{\pm})} = \pm \frac{b_j^{\pm}(z_j^{\pm})^{\mp 2n}\xi_n^{\pm}}{\dot{a}^{\pm}(z_j^{\pm})} = \pm (z_j^{\pm})^{\mp 2n} C_j^{\pm} \xi_n^{\pm}(z_j^{\pm}), \tag{29}$$

где через $C_j^{\pm}$ обозначены нормирующие константы.

3.3.2. *Асимптотическое поведение фундаментальных аналитических решений при* $|z| \to \infty$ *и* $|z| \to 0$. В этом случае разложения в ряд Лорана для фундаментальных аналитических решений $\chi_n^{\pm}(z)$ имеют следующий вид: при $|z| \to \infty$

$$\chi_n^+(z) = \begin{pmatrix} 1 + O(z^{-2}),\ n \text{ четно} & c_n^{-1} z^{-1} Q_n^+ + O(z^{-3}),\ n \text{ нечетно} \\ z^{-1} Q_{n-1}^- + O(z^{-3}),\ n \text{ нечетно} & c_n^{-1} + O(z^{-2}),\ n \text{ четно} \end{pmatrix},$$

а при $|z| \to 0$

$$\chi_n^-(z) = \begin{pmatrix} c_n^{-1} + O(z^2),\ n \text{ четно} & z Q_{n-1}^+ + O(z^3),\ n \text{ нечетно} \\ c_n^{-1} z Q_n^- + O(z^3),\ n \text{ нечетно} & 1 + O(z^2),\ n \text{ четно} \end{pmatrix}.$$

Из свойства аналитичности собственных функций оператора $L_n(z)$ следует, что $a^+(z)$ имеет аналитическое продолжение в область $|z| \to \infty$:

$$W(\varphi_n^+, \xi_n^+) = W \begin{pmatrix} 1 + O(z^{-2}),\ n \text{ четно} & c_n^{-1} z^{-1} Q_n + O(z^3),\ n \text{ нечетно} \\ z^{-1} R_{n-1} + O(z^{-3}),\ n \text{ нечетно} & c_n^{-1} + O(z^{-2}),\ n \text{ четно} \end{pmatrix},$$

тогда функция $\chi_n^+(z)$ аналитическая при $|z| \to \infty$,

$$a^+(z) = 1 - O(z^{-2}),\ n \text{ четно}, \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{30}$$

Аналогично можно найти разложение в ряд Лорана при $a_n^-(z)$:

$$W(\xi_n^-, \varphi_n^-) = W \begin{pmatrix} c_n^{-1} + O(z^2),\ n \text{ четно} & z Q_{n-1} + O(z^3),\ n \text{ нечетно} \\ c_n^{-1} z R_n + O(z^3),\ n \text{ нечетно} & 1 + O(z^2),\ n \text{ четно} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Итак, $\chi_n^-(z)$ – аналитическая функция в окрестности $|z| = 0$ и

$$a^-(z) = 1 - O(z^2),\ n \text{ четно}, \quad \text{при} \quad |z| \to 0. \tag{32}$$

Коэффициенты рассеяния записываются явно в виде сумм собственных функций:

$$\begin{aligned}
a^+(z) &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-1} Q_k^+ \varphi_k^{(2),+}, \qquad & b^+(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{2k-1} Q_k^- \varphi_k^{(1),+}, \\
a^-(z) &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z Q_k^- \varphi_k^{(1),-}, \qquad & b^-(z) &= -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-2k+1} Q_k^+ \varphi_k^{(2),-}.
\end{aligned} \tag{33}$$

4. ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Хорошо известно, что обратное преобразование рассеяния для оператора Лакса $L_n(z)$ редуцируется к граничной задаче Римана–Гильберта на комплексной плоскости. Контур, внутри которого определяются значения аналитических функций, является непрерывным спектром оператора $L_n(z)$ (6), и это единичная окружность $|z| = 1$ в случае уравнения Абловица–Ладика. Если оператор Лакса $L_n(z)$ имеет дискретные собственные значения, то получающаяся задача Римана–Гильберта будет сингулярной. Здесь мы ограничимся так называемыми сбалансированными задачами Римана–Гильберта и будем рассматривать только те задачи, которые имеют одинаковое число особенностей внутри и снаружи граничного контура, т. е. предположим, что число нулей функции $a^+(z)$ равно числу нулей функции $a^-(z)$. Случай без отражения $b^\pm(z) = 0$ соответствует солитонным решениям уравнения (5) с $\epsilon = -1$.

Симметрии и редукции симметрии. Так как разложения функций $a^\pm(z)$, введенные в п. 3.2, содержат только четные степени z^{-1} и z, тогда если $z_j^\pm$ – нули функций $a^\pm(z)$, то $-z_j^\pm$ – также нули функций $a^\pm(z)$. Отсюда следует, что

$$C_j^\pm(-z_j^\pm) = \frac{b^\pm(-z_j^+)}{\dot a^\pm(-z_j^\pm)} = C^\pm(z_j^+), \tag{34}$$

где $b_j^- = -b_j^+$ и $\rho^+(-z) = -\rho^+(z)$, $\rho^-(-z) = -\rho^-(z)$. Нелокальная инволюция (13) налагает на коэффициент отражения и нормировочную константу следующие ограничения:

$$C_j^-(z_j^-) = \frac{(b^+(z_j^{+,*}))^*}{(\dot a^-(z_j^{-,*}))^*}, \qquad \rho^-(z) = \frac{(b^+(z^*))^*}{(a^-(z^*))^*}. \tag{35}$$

Случай полюсов. Если фундаментальные аналитические решения $\widetilde\varphi_n^\pm(z)$ имеют полюсы, то в методе решения задачи Римана–Гильберта требуется дополнительная стадия, включающая интегрирование по контуру. Отправная точка – это соотношения между собственными функциями,

$$\widetilde\varphi_n^\pm = \frac{\varphi_n^\pm}{a^\pm}(z) = \xi_n^\mp(z) \pm z^{\mp 2n}\rho^\pm(z)\xi_n^\pm(z). \tag{36}$$

Применим интегрирование по контуру к следующим интегральным представлениям:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{1,n}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma^+} \frac{d\omega\, \varphi_n^+(\omega)}{(\omega - z)a^+(\omega)} - \oint_{\gamma^-} \frac{d\omega\, \xi_n^-(\omega)}{\omega - z}\right), \\
\mathcal{J}_{2,n}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma^+} \frac{d\omega\, \xi_n^+(\omega)}{\omega - z} - \oint_{\gamma^-} \frac{d\omega\, \varphi_n^-(\omega)}{(\omega - z)a^-(\omega)}\right),
\end{aligned} \tag{37}$$

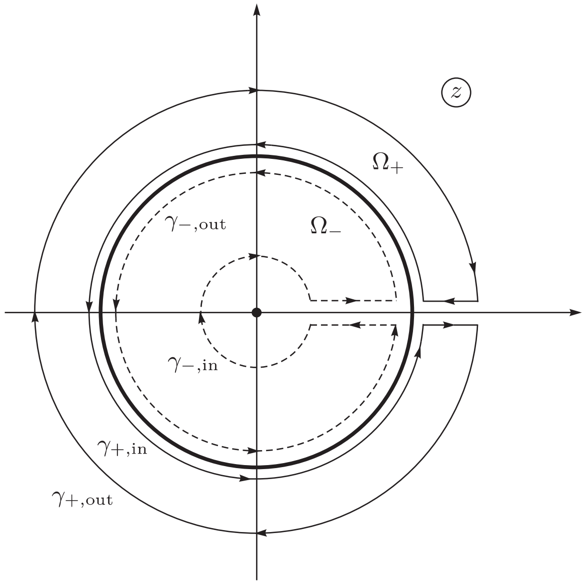

Рис. 1. Непрерывный спектр Ω оператора $L_n(z)$ (жирная линия) и контуры интегрирования.

контуры интегрирования $\gamma_\pm$ показаны на рис. 1. Здесь мы представим подробную оценку одного из интегралов $(\mathcal{J}_{2,n})$. Другой интеграл оценивается аналогично.

Напомним следующие факты: 1) функция $1/a^+(z)$ имеет простой полюс в точке $z = z_j^+$; 2) функция $1/a^-(z)$ имеет простой полюс в точке $z = z_j^-$; 3) функции ξ_n^-, ξ_n^+ не имеют полюсов, и, следовательно, подынтегральное выражение в первом интеграле в $\mathcal{J}_{2,n}(z)$ имеет полюс только в точке $z = \omega$; 4) контур отрицательно ориентирован с наружной стороны и положительно ориентирован с внутренней стороны. Таким образом, при $z \in \Omega_+$ имеем

$$\mathcal{J}_{2,n}(z) = \xi_n^+(z) - \sum_{j=1}^{S}\left[\frac{\varphi_n^-(z_j^-)}{(z - z_j^-)\dot{a}_j^-} + \frac{\varphi_n^-(-z_j^-)}{(z + z_j^-)\dot{a}_j^-}\right]. \tag{38}$$

Интеграл вдоль единичной окружности $\Omega = z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1$ равен

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma^+} \frac{d\omega\, \xi_n^+(\omega)}{\omega - z} - \oint_{\gamma^-} \frac{d\omega\, \varphi_n^-(\omega)}{(\omega - z)a^-(\omega)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Omega} \frac{d\omega}{\omega - z}\omega^{2n}\rho^-(z)\xi_n^-(z). \tag{39}$$

Если функции $a^\pm(z)$ имеют нули соответственно в точках $z_j^\pm$, то будем писать

$$\varphi_n^\pm = \pm(z_j^\pm)^{\mp 2n} b_j^\pm \xi_n^\pm, \tag{40}$$

и это дает интегральное представление для $\xi_n^+(z)$:

$$\xi_n^+(z) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Omega} \frac{d\omega}{\omega - z}\omega^{2n}\rho^-(\omega)\xi_n^-(\omega) - \\ - \sum_{j=1}^{S} C_j^-(z_j^-)^{2n}\left[\frac{\xi_n^-(z_j^-)}{z - z_j^-} + \frac{\xi_n^-(-z_j^-)}{z + z_j^-}\right]. \tag{41a}$$

Аналогично можно найти интегральное представление для $\xi_n^-(z)$ при $z \in \Omega_-$, оценивая интеграл $\mathcal{J}_{1,n}$:

$$\xi_n^-(z) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Omega \frac{d\omega}{\omega - z}\omega^{-2n}\rho^+(\omega)\xi_n^+(\omega) + \\ + \sum_{j=1}^{S} C_j^+(z_j^+)^{-2n}\left[\frac{\xi_n^+(z_j^+)}{z - z_j^+} + \frac{\xi_n^+(-z_j^+)}{z + z_j^+}\right]. \tag{41б}$$

Подынтегральные выражения в интегральных представлениях (41a) и (41б) выражаются через $\rho^\pm(z)$ только на непрерывном спектре, тогда как суммы, дающие вклад от дискретного спектра, выражаются через нормировочные константы $C_j^\pm(z_j^\pm)$. Таким образом, система сингулярных интегральных уравнений (40), (41) допускает единственное решение, а это значит, что минимальное множество данных рассеяния $\mathcal{F}_1 = \{\rho^+(z), \rho^-(z), z \in |z| = 1,\ z_j^\pm,\ j = 1, \ldots, S\}$ содержит всю информацию, необходимую для однозначного определения решений Йоста $\xi_n^\pm(z)$.

4.1. Односолитонное решение. В случае, когда оператор Лакса $L_n(z)$ имеет истинные собственные значения, но $\rho^+(z) = \rho^-(z) = 0$ на непрерывном спектре оператора $L_n(z)$, система (40), (41) сводится к линейной системе алгебраических уравнений:

$$\xi_n^+(z) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{S} C_j^-(z_j^-)^{2n}\left[\frac{\xi_n^-(z_j^-)}{z - z_j^-} + \frac{\xi_n^-(-z_j^-)}{z + z_j^-}\right], \tag{42a}$$

$$\xi_n^-(z) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{S} C_j^+(z_j^+)^{-2n}\left[\frac{\xi_n^+(z_j^+)}{z - z_j^+} + \frac{\xi_n^+(-z_j^+)}{z + z_j^+}\right]. \tag{42б}$$

Полагая $z = \pm z_j^\pm$ в (42a) и (42б), соответственно получим

$$\begin{aligned} \xi_n^+(\pm z_j^+) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mp \sum_{k=1}^{S} C_k^-(z_k^-)^{2n}\left[\frac{\xi_n^-(z_k^-)}{z_j^+ \mp z_k^-} + \frac{\xi_n^-(-z_k^-)}{z_j^+ \pm z_k^-}\right], \\ \xi_n^-(\pm z_j^-) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \pm \sum_{k=1}^{S} C_k^+(z_k^+)^{-2n}\left[\frac{\xi_n^+(z_k^+)}{z_j^- \mp z_k^+} + \frac{\xi_n^+(-z_k^+)}{z_j^- \pm z_k^+}\right]. \end{aligned} \tag{43}$$

Итак, из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} &\xi_n^{+,1}(-z_j^+) = -\xi_n^{+,1}(z_j^+) \quad \text{тогда и только тогда, когда } \xi_n^{-,1}(-z_j^-) = \xi_n^{-,1}(z_j^-), \\ &\xi_n^{+,2}(-z_j^+) = \xi_n^{+,2}(z_j^+) \quad \text{тогда и только тогда, когда } \xi_n^{-,2}(-z_j^-) = -\xi_n^{-,2}(z_j^-). \end{aligned} \tag{44}$$

Тогда решение уравнений (42a) и (42б) имеет вид

$$\xi_n^{-,1}(z_1^-) = \left[1 - 4C_1^+C_1^-\frac{(z_1^+)^{-2(n-1)}(z_1^-)^{2n}}{((z_1^+)^2 - (z_1^-)^2)^2}\right]^{-1}, \tag{45}$$

$$\xi_n^{+,2}(z_1^+) = \left[1 + 4C_1^+C_1^-\frac{(z_1^-)^{2(n-1)}(z_1^+)^{-2n}}{((z_1^+)^2 - (z_1^-)^2)^2}\right]^{-1}. \tag{46}$$

Кроме того, потенциалы записываются как

$$Q^+_{n-1} = -2C_1^+(z_1^+)^{-2n-2}\xi_n^{+,(2)}(z_1^+), \tag{47}$$

$$Q^-_n = 2C_1^-(z_1^-)^{2n-2}\xi_n^{-,(1)}(z_1^-). \tag{48}$$

Затем, подставляя уравнения (45) и (46) в (47) и (48), получим односолитонное решение в общем виде:

$$Q^+_{1n} = -\frac{2C_1^-(z_1^-)^{2n}}{1+4C_1^+C_1^-((z_1^+)^2-(z_1^-)^2)^{(-2)}(z_1^+)^{-2n}(z_1^-)^{2(n+1)}}\,, \tag{49}$$

$$Q^-_{1n} = \frac{2C_1^+(z_1^+)^{-2(n+1)}}{1+4C_1^+C_1^-((z_1^+)^2-(z_1^-)^2)^{-2}(z_1^+)^{-2n}(z_1^-)^{2(n+1)}}\,. \tag{50}$$

Принимая во внимание эволюцию во времени нормировочных констант

$$C_1^+(z,\tau) = C_1^+(0)e^{2i\omega_1^+\tau}, \qquad C_1^-(z,\tau) = C_1^-(0)e^{-2i\omega_1^-\tau},$$

где $\omega_1^\pm = (i/2)(z_1^\pm - (z_1^\pm)^{-1})^2$, и каноническое условие симметрии $Q^-_n = -(Q^+_{-n})^*$, приводим (49) и (50) к стандартному виду для односолитонного решения нелокального уравнения Абловица–Ладика:

$$Q^+_{1n} = \frac{(z_1^-z_1^+)^{-1}((z_1^+)^2-(z_1^-)^2)e^{i\alpha_1^-}e^{-2i\omega_1^-\tau}(z_1^-)^{2n}}{1+e^{i(\alpha_1^++\alpha_1^-)}e^{2i(\omega_1^+-\omega_1^-)\tau}(z_1^+)^{-2n}(z_1^-)^{2n}}\,. \tag{51}$$

Это результат, который получили Абловиц и Мусслимани.

4.2. Двухсолитонное решение. По аналогии с предыдущим рассмотрением (как в случае одного полюса) получим двухсолитонные решения сингулярной задачи Римана–Гильберта с квартетом дискретных собственных значений (особенностей) $z^+_{\{1,2\}}$ и $z^-_{\{1,2\}}$. Отправной точкой здесь служат следующие линейные интегральные уравнения для $\xi_n^\pm(z)$:

$$\begin{aligned}
\xi_n^+(z) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Omega\left(\frac{d\omega}{\omega-z}(\omega)^{2n}\rho^-(\omega)\xi_n^-(\omega)\right) - \\
&- \left[C_1^-(z_1^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_1^-)}{z-z_1^-}+\frac{\xi_n^-(-z_1^-)}{z+z_1^-}\right)\right] + \left[C_2^-(z_2^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_2^-)}{z-z_2^-}+\frac{\xi_n^-(-z_2^-)}{z+z_2^-}\right)\right],\\
\xi_n^-(z) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Omega\left(\frac{d\omega}{\omega-z}(\omega)^{-2n}\rho^+(\omega)\xi_n^+(\omega)\right) + \\
&+ \left[C_1^+(z_1^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_1^+)}{z-z_1^+}+\frac{\xi_n^+(-z_1^+)}{z+z_1^+}\right)\right] + \left[C_2^+(z_2^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_2^+)}{z-z_2^+}+\frac{\xi_n^+(-z_2^+)}{z+z_2^+}\right)\right].
\end{aligned} \tag{52}$$

Двухсолитонное решение опять соответствует нулевым коэффициентам отражения (т. е. $\rho^+(z) = \rho^-(z) = 0$ при $|z| = 1$). В этом случае система (52) сводится к линейной системе алгебраических уравнений для $\xi_n^+(z)$

$$\begin{aligned}
\xi_n^+(z) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &- \left[C_1^-(z_1^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_1^-)}{z-z_1^-}+\frac{\xi_n^-(-z_1^-)}{z+z_1^-}\right)\right] - \\
&- \left[C_2^-(z_2^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_2^-)}{z-z_2^-}+\frac{\xi_n^-(-z_2^-)}{z+z_2^-}\right)\right]
\end{aligned} \tag{53a}$$

и аналогичной системе для $\xi_n^-(z)$

$$\begin{aligned}\xi_n^-(z) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left[C_1^+(z_1^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_1^+)}{z - z_1^+} + \frac{\xi_n^+(-z_1^+)}{z + z_1^+}\right)\right] + \\ + \left[C_2^+(z_2^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_2^+)}{z - z_2^+} + \frac{\xi_n^+(-z_2^+)}{z + z_2^+}\right)\right].\end{aligned} \tag{53б}$$

Здесь $\xi_n^+(\pm z_j^+)$ – фундаментальные аналитические решения $\xi_n^+(z)$, вычисленные для собственного значения $\pm z_j^+$ (аналогично $\xi_n^-(\pm z_j^-)$ – фундаментальные аналитические решения $\xi_n^-(z)$, вычисленные для собственного значения $\pm z_j^-$). Можно получить выражения для этих векторов, вычисляя (53а) в точках $\pm z_{\{1,2\}}^+$ и вычисляя (53б) в точках $\pm z_{\{1,2\}}^-$. Это приводит к линейной алгебраической системе, составленной из (53а) и (53б):

$$\begin{aligned}
\xi_n^+(\pm z_1^+) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \left[C_1^-(z_1^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_1^-)}{\pm z_1^+ - z_1^-} + \frac{\xi_n^-(-z_1^-)}{\pm z_1^+ + z_1^-}\right)\right] - \\
&\quad - \left[C_2^-(z_2^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_2^-)}{\pm z_1^+ - z_2^-} + \frac{\xi_n^-(-z_2^-)}{\pm z_1^+ + z_2^-}\right)\right], \\
\xi_n^+(\pm z_2^+) &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \left[C_1^-(z_1^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_1^-)}{\pm z_2^+ - z_1^-} + \frac{\xi_n^-(-z_1^-)}{\pm z_2^+ + z_1^-}\right)\right] - \\
&\quad - \left[C_2^-(z_2^-)^{2n}\left(\frac{\xi_n^-(z_2^-)}{\pm z_2^+ - z_2^-} + \frac{\xi_n^-(-z_2^-)}{\pm z_2^+ + z_2^-}\right)\right], \\
\xi_n^-(\pm z_1^-) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left[C_1^+(z_1^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_1^+)}{\pm z_1^- - z_1^+} + \frac{\xi_n^+(-z_1^+)}{\pm z_1^- + z_1^+}\right)\right] + \\
&\quad + \left[C_2^+(z_2^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_2^+)}{\pm z_1^- - z_2^+} + \frac{\xi_n^+(-z_2^+)}{\pm z_1^- + z_2^+}\right)\right], \\
\xi_n^-(\pm z_2^-) &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \left[C_1^+(z_1^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_1^+)}{\pm z_2^- - z_1^+} + \frac{\xi_n^+(-z_1^+)}{\pm z_2^- + z_1^+}\right)\right] + \\
&\quad + \left[C_2^+(z_2^+)^{-2n}\left(\frac{\xi_n^+(z_2^+)}{\pm z_2^- - z_2^+} + \frac{\xi_n^+(-z_2^+)}{\pm z_2^- + z_2^+}\right)\right].
\end{aligned} \tag{54}$$

Из (54) получим

$$\begin{aligned}
&\xi_n^{+,1}(-z_j^+) = -\xi_n^{+,1}(z_j^+) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \xi_n^{-,1}(-z_j^-) = \xi_n^{-,1}(z_j^-), \\
&\xi_n^{+,2}(-z_j^+) = \xi_n^{+,2}(z_j^+) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \xi_n^{-,2}(-z_j^-) = -\xi_n^{-,2}(z_j^-).
\end{aligned} \tag{55}$$

Можно восстановить Q_n^-, подставляя разложение в степенной ряд правой части выражения для $\xi_n^{-,2}(z)$ в (53б) и вычисляя вычет при $z \to z_1^+$ или при $z \to z_2^+$:

$$Q_n^- = -\frac{1}{2}C_1^+(z_1^+)^{-2n-2}\xi_n^{+,2}(z_1^+) + \frac{2C_2^+(z_2^+)^{-2n}}{(z_1^+)^2 - (z_2^+)^2}\xi_n^{+,2}(z_2^+) \tag{56}$$

или

$$Q_n^- = \frac{2C_1^+(z_1^+)^{-2n}}{(z_2^+)^2 - (z_1^+)^2}\xi_n^{+,2}(z_1^+) - \frac{1}{2}C_2^+(z_2^+)^{-2n-2}\xi_n^{+,2}(z_2^+). \tag{57}$$

Однако довольно трудно вычислить потенциал из $\varphi_n^-(z)$. Для этого умножим разложение в ряд Лорана функции $\chi_n^-(z)$ на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix}$ и сравним полученное выражение с правой частью соотношения (53a):

$$(\widetilde{\xi}_n^-, \widetilde{\varphi}_n^-) \simeq \widetilde{\chi}_n^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n^{-1} & zQ_{n-1}^+ \\ c_n^{-1} zQ_n^- & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n^{-1} & zQ_{n-1}^+ \\ zQ_n^- & c_n \end{pmatrix}, \tag{58}$$

где функция $\widetilde{\chi}_n^-(z)$ разлагается в такой же степенной ряд, как и $\chi_n^-(z)$. Тогда можно определить потенциал Q_{n-1}^+ из $\widetilde{\varphi}_n^{-,1}$ в (58), так как из (36) (при $b^-(z) = 0$) следует, что

$$\widetilde{\varphi}_n^-(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[C_1^-(z_1^-)^{2n} \left(\frac{\xi_n^-(z_1^-)}{z - z_1^-} + \frac{\xi_n^-(-z_1^-)}{z + z_1^-} \right) \right] - \\ - \left[C_2^-(z_2^-)^{2n} \left(\frac{\xi_n^-(z_2^-)}{z - z_2^-} + \frac{\xi_n^-(-z_2^-)}{z + z_2^-} \right) \right]. \tag{59}$$

Получен квартет собственных значений $\pm z_j^+$, $\pm z_j^-$ соответственно с $|z_j^+| > 1$ и $|z_j^-| < 1$. Таким образом, решена линейная алгебраическая система (54) для $\xi_n^-(z_1^-)$, $\xi_n^-(z_2^-)$, $\xi_n^+(z_1^+)$ и $\xi_n^+(z_2^+)$. В частности, чтобы определить Q_n^+, нужно иметь $\xi_n^-(z_1^-)$ и $\xi_n^-(z_2^-)$:

$$\xi_n^{+,1}(z_1^+) = -2z_1^+ \left[\frac{C_1^-(z_1^-)^{2n}}{(z_1^+)^2 - (z_1^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_1^-) + \frac{C_2^-(z_2^-)^{2n}}{(z_1^+)^2 - (z_2^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_2^-) \right], \tag{60а}$$

$$\xi_n^{+,1}(z_2^+) = -2z_2^+ \left[\frac{C_1^-(z_1^-)^{2n}}{(z_2^+)^2 - (z_1^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_1^-) + \frac{C_2^-(z_2^-)^{2n}}{(z_2^+)^2 - (z_2^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_2^-) \right], \tag{60б}$$

$$\xi_n^{-,1}(z_1^-) = 1 + \frac{2C_1^+(z_1^+)^{-2(n-1)}}{(z_1^-)^2 - (z_1^+)^2} \xi_n^{+,1}(z_1^+) + \frac{2C_2^+(z_2^+)^{-2(n-1)}}{(z_1^-)^2 - (z_2^+)^2} \xi_n^{+,1}(z_2^+), \tag{60в}$$

$$\xi_n^{-,1}(z_2^-) = 1 + \frac{2C_1^+(z_1^+)^{-2(n-1)}}{(z_2^-)^2 - (z_1^+)^2} \xi_n^{+,1}(z_1^+) + \frac{2C_2^+(z_2^+)^{-2(n-1)}}{(z_2^-)^2 - (z_2^+)^2} \xi_n^{+,1}(z_2^+). \tag{60г}$$

Теперь, сравнивая разложения в степенные ряды правой части выражения (59) с разложением (58), получим потенциал при $z \to z_1^-$ или $z \to z_2^-$:

$$Q_{n-1}^+ = \frac{1}{2} C_1^-(z_1^-)^{2n-2} \xi_n^{-,1}(z_1^-) - \frac{2C_2^-(z_2^-)^{2n}}{(z_1^-)^2 - (z_2^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_2^-) \tag{61}$$

или

$$Q_{n-1}^+ = \frac{-2C_1^-(z_1^-)^{2n}}{(z_2^-)^2 - (z_1^-)^2} \xi_n^{-,1}(z_1^-) + \frac{1}{2} C_2^-(z_2^-)^{2n-2} \xi_n^{-,1}(z_2^-). \tag{62}$$

Затем подставляя каждое из выражений (60в) и (60г) в (61) или (62) и применяя инволюцию (4) с отрицательным знаком, получим, что (61) является решением нелокального дискретного НУШ.

5. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $L_N(Z)$ И ПОЛНОТА РЕШЕНИЙ ЙОСТА

Основным фактором, определяющим спектральные свойства оператора $L_n(z)$, является выбор класса функций, в котором выбирается потенциал $Q_n(t)$. Здесь мы предположим, что $Q_n(t)$ – дифференцируемая функция при всех $t \in \mathbb{R}$ и существующая при всех $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, мы также предположим, что она стремится к нулю при $n \to \pm\infty$.

Можно использовать фундаментальные аналитические решения $\chi_n^{\pm}(z)$ оператора $L_n(z)$, чтобы построить резольвенту $R_{n,m}(z)$ оператора $L_n(z)$, а затем изучать его спектральные свойства. Из общей теории линейных операторов известно, что точка комплексной z-плоскости называется регулярной, если $R_{n,m}(z)$ – ограниченный интегральный оператор. На каждом связном подмножестве регулярных точек $R(z)$ – аналитическая функция переменного z. Точки, которые не являются регулярными, составляют спектр оператора $L_n(z)$, а именно: непрерывный спектр оператора $L_n(z)$ состоит из всех точек z, для которых $R_{n,m}(z)$ – неограниченный интегральный оператор, тогда как дискретный спектр оператора $L_n(z)$ состоит из всех точек z, для которых $R_{n,m}(z)$ имеет особенности типа полюса.

Ядро резольвенты $R_{n,m}(z)$ выражается через фундаментальные аналитические решения $\chi_n^{\pm}(z)$ следующим образом:

$$R^+_{\{n,m\}}(z) = \chi^+_{n+1}(z) \begin{pmatrix} \theta(m-n) & 0 \\ 0 & \theta(n-m) \end{pmatrix} \widehat{\chi}^+_m(z), \tag{63а}$$

$$R^-_{\{n,m\}}(z) = \chi^-_{n+1}(z) \begin{pmatrix} \theta(n-m) & 0 \\ 0 & \theta(m-n) \end{pmatrix} \widehat{\chi}^-_m(z). \tag{63б}$$

Заметим, что по построению $R^{\pm}_{\{n,m\}}(z)$ – аналитическая функция на контурах $\gamma^{\pm}$ соответственно.

Выведем отношение полноты для решений Йоста оператора L_n, построив разбиение единицы для группы фундаментальных решений оператора $L_n(z)$. Для этого снова воспользуемся методом интегрирования по должным образом выбранным контурам, которые не пересекают непрерывный спектр оператора $L_n(z)$. Нам нужно оценить интеграл

$$\mathcal{J}_{R,\{n,m\}}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma^+} dz\, R_n^+(z) - \oint_{\gamma^-} dz\, R_n^-(z) \right) \tag{64}$$

вдоль контуров $\gamma_{\pm}$, показанных на рис. 1. Из теоремы Коши о вычетах получим

$$\mathcal{J}_{R,\{n,m\}}(z) = \sum_{j=1}^{S} \left(\operatorname*{Res}_{z=\pm z_j^+} R_n^+(z) + \operatorname*{Res}_{z=\pm z_j^-} R_n^-(z) \right). \tag{65}$$

Здесь через $z_j^{\pm}$ обозначены дискретные собственные значения оператора $L_n(z)$, которые лежат соответственно вне и внутри единичной окружности $|z| = 1$. Снова предположим, что имеется одинаковое количество таких значений и все они являются изолированными особенностями резольвенты.

Каждый из интегралов в (64) можно записать как сумму интеграла по непрерывному спектру Ω и интеграла, содержащего асимптотики при $|z| \to \infty$ и $|z| \to 0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^\pm} dz\, R_n^\pm(z) = \int_{|z|=1} dz\, R_n^\pm(z) - \oint_{\gamma_{\mathrm{as}}^\pm} dz\, R_n^\pm(z). \tag{66}$$

Сначала, чтобы вычислить вычеты в (65), нужно получить разложения фундаментальных аналитических решений и данных рассеяния в ряды Лорана в окрестности точек дискретного спектра $z_j^\pm$. Применяя (20), (21), получим следующие разложения:

$$\begin{aligned}
a^\pm(z) &= (z - (\pm z_j^\pm))\dot{a}_j^\pm + \frac{1}{2}(z - (\pm z_j^\pm))^2 \ddot{a}_j^\pm + \cdots\,, \\
\alpha^\pm(z) &= (z - (\pm z_j^\pm))\dot{\alpha}_j^\pm + \frac{1}{2}(z - (\pm z_j^\pm))^2 \ddot{\alpha}_j^\pm + \cdots\,, \\
\chi_n^+(z_j^+) &= \psi_{n,j}^+(z)(b_j^+, 1) = \phi_{n,j}^+(z)(1, 1/b_j^+), \\
\widehat{\chi}_n^+(z_j^+) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta_j^+ \end{pmatrix} \frac{\widetilde{\Psi}_{n,j}^+(z)}{(z - (\pm z_j^+))\dot{\alpha}_j^+} = \begin{pmatrix} 1/\beta_j^+ \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\widetilde{\Phi}_{n,j}^+(z)}{(z - (\pm z_j^+))\dot{\alpha}_j^+}\,, \\
\chi_n^-(z_j^-) &= \psi_{n,j}^-(z)(1, -b_j^-) = \phi_{n,j}^-(z)(-1/b_j^-, 1), \\
\widehat{\chi}_n^-(z_j^-) &= -\begin{pmatrix} \beta_j^- \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\widetilde{\Psi}_{n,j}^-(z)}{(z - (\pm z_j^-))\dot{\alpha}_j^-} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\beta_j^- \end{pmatrix} \frac{\widetilde{\Phi}_{n,j}^-(z)}{(z - (\pm z_j^-))\dot{\alpha}_j^-}\,,
\end{aligned} \tag{67}$$

где $\widetilde{\Psi}_n(z)$ и $\widetilde{\Phi}_n(z)$ связаны соответственно с $\psi_n(z)$ и $\phi_n(z)$. В результате получим вычеты функции $R_n^\pm(z)$ в точках $z = \pm z_j^\pm$:

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm z_j^\pm} R_{n,m}^\pm(z) = \mp \frac{\phi_{n+1,j}^\pm(z)\widetilde{\Psi}_{m,j}^\pm(z)}{\dot{\alpha}_j^\pm(z)}\,. \tag{68}$$

Теперь можно вычислить скачок функции $R_n(z)$ на единичной окружности $|z| = 1$. Применяя (63a), получим

$$\int_{|z|=1} dz\, (R_{n,m}^+(z) - R_{n,m}^-(z)) = \int_{|z|=1} dz \left(\frac{\phi_{n+1}^+(z)\widetilde{\Psi}_m^+(z)}{\alpha^+(z)} + \frac{\phi_{n+1}^-(z)\widetilde{\Psi}_m^-(z)}{\alpha^-(z)} \right). \tag{69}$$

Наконец, нужно вычислить вклад от интегралов по асимптотическим окружностям (т. е. при $|z| \to \infty$ и $|z| \to 0$ соответственно). Для этого нужно получить асимптотики фундаментальных аналитических решений $\chi_{n,as}^\pm(z)$ при $z \to \infty$ и $z \to 0$:

$$\begin{aligned}
\chi_{\{\mathrm{as},n\}}^+(z) &= \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1/z), \qquad z \to \infty, \\
\chi_{\{\mathrm{as},n\}}^-(z) &= \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z), \qquad z \to 0.
\end{aligned}$$

Непосредственное интегрирование по контуру дает (если перейти к пределу при $|z| \to \infty$ в интеграле по $\gamma_{\rm as}^{-}$ и к пределу при $|z| \to 0$ в интеграле по $\gamma_{\rm as}^{+}$ соответственно)

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_{\rm as}^{+}} dz\, R^{+}_{\{{\rm as},n,m\}} + \oint_{\gamma_{\rm as}^{-}} dz\, R^{-}_{\{{\rm as},n,m\}}\right) = \delta(n-m)\mathbb{I}. \tag{70}$$

В результате, объединяя (64) и (65) и принимая во внимание (68), (69) и (70), получим следующее отношение полноты:

$$\delta(n-m)\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz\left(\frac{\phi^{+}_{n+1}(z)\widetilde{\Psi}^{+}_{m}(z)}{\alpha^{+}(z)} + \frac{\phi^{-}_{n+1}(z)\widetilde{\Psi}^{-}_{m}(z)}{\alpha^{-}(z)}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\phi^{+}_{\{n+1,j\}}(z)\widetilde{\Psi}^{+}_{m,j}(z)}{\dot{\alpha}^{+}_{j}(z)} - \frac{\phi^{-}_{\{n+1,j\}}(z)\widetilde{\Psi}^{-}_{m,j}(z)}{\dot{\alpha}^{-}_{j}(z)}\right). \tag{71}$$

Следовательно, решения Йоста $\phi^{\pm}_{n}(z)$ образуют полное множество функций на пространстве фундаментальных решений оператора $L_n(z)$.

Применяя отношение полноты (71), можно разложить функцию $Y(z)$ из пространства решений оператора $L_n(z)$ на полном множестве решений Йоста по следующим формулам разложения:

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} dz\left(\phi^{+}_{n+1}(z)y^{+}_{m}(z) + \phi^{-}_{n+1}(z)y^{-}_{m}(z)\right) + \\ + \sum_{j=1}^{S}\left(\phi^{+}_{\{n+1,j\}}(z)y^{+}_{\{m,j\}}(z) - \phi^{-}_{\{n+1,j\}}(z)y^{-}_{\{m,j\}}(z)\right), \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} y^{\pm}_{m}(z) &= \frac{1}{\alpha^{\pm}(z)}\int_{|z|=1} dz\, \widetilde{\Psi}^{\pm}_{m}(z)Y_m(z), \\ y^{\pm}_{\{m,j\}}(z) &= \frac{1}{\dot{\alpha}^{\pm}_{j}}\int_{|z|=1} dz\, \widetilde{\Psi}^{\pm}_{\{m,j\}}(z)Y_m(z). \end{aligned} \tag{73}$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучена нелокальная версия [43] полудискретного НУШ, записанного как уравнение Абловица–Ладика. Это уравнение оказывается $\mathcal{PT}$-симметричным. Сформулирована прямая задача рассеяния для нелокального уравнения Абловица–Ладика, т. е. построены решения Йоста и минимальное множество данных рассеяния, а также построены фундаментальные аналитические решения. Затем, опираясь на формулировку обратного преобразования рассеяния для условия (4) в виде аддитивной граничной задачи Римана–Гильберта, мы вывели одно- и двухсолитонные решения.

В работе [43] было показано, что в односолитонном решении возникают особенности за конечное время. Это происходит из-за дисбаланса ассоциированной задачи Римана–Гильберта, т. е. число нулей фундаментальных аналитических решений внутри граничного контура не равно числу нулей внутри контура, следовательно, для нелокальной инволюции требуется, чтобы в случае, когда z_j – дискретное собственное число, z_j^* также должно быть собственным числом; другими словами, оба числа z_j и z_j^* должны находиться либо внутри единичной окружности, либо снаружи. В зависимости от положения дискретных собственных значений $z_j^{\pm}$ на спектральной плоскости для двухсолитонного решения существуют два режима. Если одно из дискретных собственных значений лежит внутри единичной окружности, а другое снаружи, то нелокальная инволюция сохраняет количество чисел внутри и снаружи контура и в результате соответствующие двухсолитонные решения регулярны при всех t. В противном случае в двухсолитонном решении снова возникает особенность за конечное время.

Наконец, кратко опишем спектральные свойства оператора Лакса $L_n(z)$. Были получены отношения полноты для решений Йоста и разложения на полном множестве решений Йоста для базовой функции из пространства решений оператора $L_n(z)$.

Полученные результаты можно развивать в нескольких направлениях.

1. Разработать калибровочно-ковариантную формулировку МОЗР для нелокального уравнения Абловица–Ладика (49), включая производящий (рекурсивный) оператор [57] и его спектральное разложение [55], описание класса дифференциально-разностных уравнений, разрешимых в спектральной задаче (6) (т. е. соответствующей интегрируемой иерархии), описание бесконечного множества интегралов движения и иерархии гамильтоновых структур.

2. Изучить калибровочно-эквивалентные системы [11]–[13].

3. Изучить МОЗР для эквивалентной спектральной задачи на собственные числа (12). В этом случае соответствующая задача Римана–Гильберта допускает каноническую нормировку.

4. Изучить ассоциированные преобразования Дарбу и их обобщения для локальных и нелокальных уравнений Абловица–Ладика. Это даст алгебраический метод для построения и классификации возможных солитонных решений, включая и рациональные решения [58].

5. Обобщить результаты, полученные в настоящей работе, на случай ненулевых граничных условий (нетривиальный фон) [59]–[62]. В локальном случае такие решения изучаются в нелинейный оптике, а именно, они возникают в теории ультракоротких фемтосекундных нелинейных импульсов в оптических слоях. Нелокальная редукция уравнения Абловица–Ладика также представляет интерес в теории электромагнитных волн в искусственных гетерогенных средах [48]. Этот случай более сложный и требует отдельного рассмотрения.

6. Изучить многокомпонентные обобщения [10], [14], [15], [56], [63], [64] локального и нелокального полудискретного НУШ, включая блочную систему Абловица–Ладика [26] и обобщения на случай однородных и симметричных пространств. Такие многокомпонентные обобщения намного сложнее, чем в непрерывном случае, и, насколько нам известно, до сих пор не изучались.

Благодарности. Авторы благодарят профессора Марка Абловица и профессора Владимира Герджикова за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.

[2] V. S. Gerdjikov, G. Vilasi, A. B. Yanovski, *Integrable Hamiltonian Hierarchies. Spectral and Geometric Methods*, Lecture Notes in Physics, **748**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.

[4] А. Б. Шабат, "Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений", *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 75–78; "Обратная задача рассеяния", *Дифференц. уравнения*, **15**:10 (1979), 1824–1834.

[5] M. Bruschi, S. V. Manakov, O. Ragnisco, D. Levi, "Evolution equations associated with the discrete analog of the matrix Schrödinger spectral problem solvable by IST", *J. Math. Phys.*, **22**:11 (1981), 2463–2471.

[6] V. S. Gerdjikov, "Generalised Fourier transforms for the soliton equations. Gauge covariant formulation", *Inverse Problems*, **2**:1 (1986), 51–74.

[7] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, "Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I", *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53; "Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II", *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.

[8] M. J. Ablowitz, B. Prinari, D. A. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[9] V. A. Atanasov, V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov, "Fordy–Kulish model and spinor Bose–Einstein condensate", *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:3 (2008), 291–298.

[10] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, R. I. Ivanov, N. A. Kostov, "N-wave interactions related to simple Lie algebras. $\mathbb{Z}_2$-reductions and soliton solutions", *Inverse Problems*, **17**:4 (2001), 999–1015, arXiv: nlin.SI/0009034.

[11] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov, "On N-wave type systems and their Gauge equivalent", *Eur. J. Phys. B*, **29**:1 (2002), 243–248, arXiv: nlin/0111027.

[12] В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, А. В. Михайлов, Т. И. Валчев, "Рациональные пучки и рекурсионные операторы для интегрируемых уравнений на симметричных пространствах типа **A.III**", *ТМФ*, **167**:3 (2011), 394–406.

[13] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, A. V. Mikhailov, T. I. Valchev, "Polynomial bundles and generalized Fourier transforms for integrable equations on **A.III**-type symmetric spaces", *SIGMA*, **7** (2011), 48, 096.

[14] G. G. Grahovski, "On the reductions and scattering data for the generalized Zakharov–Shabat systems", *Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II* (Gallipoli, Italy, 27 June – 6 July, 2002), eds. M. J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari, World Sci., Singapore, 2003, 71–78; G. G. Grahovski, M. Condon, "On the Caudrey–Beals–Coifman system and the gauge group action", *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**, suppl. 3 (2008), 197–208, arXiv: 0710.3302.

[15] A. P. Fordy, P. P. Kulish, "Nonlinear Schrödinger equations and simple Lie algebras", *Commun. Math. Phys.*, **89**:3 (1983), 427–443.

[16] A. V. Mikhailov, "The reduction problem and the inverse scattering problem", *Phys. D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.

[17] T. I. Valchev, "On Mikhailov's reduction group", *Phys. Lett. A*, **379**:34–35 (2015), 1877–1880.

[18] В. Е. Захаров, "Точные решения в задаче о параметрическом взаимодействии трехмерных волновых пакетов", *Докл. АН СССР*, **228**:6 (1976), 1314–1316.

[19] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations”, *J. Math. Phys.*, **16**:3 (1975), 598–603.

[20] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis”, *J. Math. Phys.*, **17**:6 (1976), 1011–1018.

[21] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “A nonlinear difference scheme and inverse scattering”, *Stud. Appl. Math.*, **55**:3 (1976), 213–229.

[22] M. J. Ablowitz, B. Prinari, D. A. Trubatch, “Discrete vector solitons: composite solitons, Yang–Baxter maps and computation”, *Stud. App. Math.*, **116**:1 (2006), 97–133.

[23] M. J. Ablowitz, G. Biondini, B. Prinari, “Inverse scattering transform for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation with non-vanishing boundary conditions”, *Inverse Problems*, **23**:4 (2007), 1711–1758.

[24] G. Biondini, A. Bui, “The Ablowitz–Ladik system with linearizable boundary conditions”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:37 (2015), 375202, 31 pp.

[25] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, “Гамильтонова структура многокомпонентных разностных нелинейных уравнений Шредингера”, *ТМФ*, **52**:1 (1982), 89–104.

[26] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, *Блочная дискретная система Захарова–Шабата* I:, Препринт ОИЯИ E2-81-811, ОИЯИ, Дубна, 1981; *Блочная дискретная система Захарова–Шабата* II: *Гамильтоновы структуры*., Препринт ОИЯИ E2-81-812, ОИЯИ, Дубна, 1981.

[27] В. С. Герджиков, М. И. Иванов, П. П. Кулиш, *Полная интегрируемость разностных эволюционных уравнений*, Препринт ОИЯИ E2-80-882, ОИЯИ, Дубна, 1981.

[28] V. S. Gerdjikov, M. I. Ivanov, P. P. Kulish, “Expansions over the ‘squared’ solutions and difference evolution equations”, *J. Math. Phys.*, **25**:1 (1984), 25–34.

[29] S. Takeno, K. Hori, “A propagating self-localized mode in a one-dimensional lattice with quartic anharmonicity”, *J. Phys. Soc. Japan*, **59**:9 (1990), 3037–3040.

[30] V. M. Kenkre, D. K. Campbell, “Self-trapping on a dimer: time-dependent solutions of a discrete nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. B*, **34**:7 (1986), 4959–4961.

[31] Y. Ishimori, “An integrable classical spin chain”, *J. Phys. Soc. Japan*, **51**:11 (1982), 3417–3418.

[32] N. Papanicoulau, “Complete integrability for a discrete Heisenberg chain”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**:12 (1987), 3637–3652.

[33] M. J. Ablowitz, Y. Ohta, D. A. Trubatch, “On discretizations of the vector nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Lett. A*, **253**:5–6 (1999), 287–304.

[34] M. Bruschi, S. V. Manakov, O. Ragnisco, D. Levi, “The nonabelian Toda lattice: discrete analogue of the matrix Schrödinger spectral problem”, *J. Math. Phys.*, **21**:12 (1980), 2749–2753.

[35] T. Tsuchida, H. Ujino, M. Wadati, “Integrable semi-discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:11 (1999), 2239–2262.

[36] V. E. Vekslerchik, V. V. Konotop, “Discrete nonlinear Schrödinger equation under non-vanishing boundary conditions”, *Inverse Problems*, **8**:6 (1992), 889–909.

[37] V. E. Vekslerchik, “Finite nonlinear Schrödinger chain”, *Phys. Lett. A*, **174**:4 (1993), 285–288.

[38] V. E. Vekslerchik, “Functional representation of the Ablowitz–Ladik hierarchy”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:3 (1998), 1087–1099; “Functional representation of the Ablowitz–Ladik hierarchy. II”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **9**:2 (2002), 157–180.

[39] E. V. Doktorov, N. P. Matsuka, V. M. Rothos, “Perturbation-induced radiation by the Ablowitz–Ladik soliton”, *Phys. Rev. E*, **68**:8 (2003), 14, 066610, 14 pp.

[40] E. V. Doktorov, N. P. Matsuka, V. M. Rothos, “Dynamics of the Ablowitz–Ladik soliton train”, *Phys. Rev. E*, **69**:5 (2004), 056607, 7 pp.

[41] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, "Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation", *Phys. Rev. Lett.*, **110**:6 (2013), 064105, 5 pp.

[42] V. S. Gerdjikov, A. Saxena, "Complete integrability of nonlocal nonlinear Schrödinger equation", *J. Math. Phys.*, **58**:1 (2017), 013502, 33 pp., arXiv: 1510.0480.

[43] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, "Integrable discrete $\mathcal{PT}$ symmetric model", *Phys. Rev. E*, **90**:3 (2014), 032912, 5 pp.

[44] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, "Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation", *Nonlinearity*, **29**:3 (2016), 915–946.

[45] F. K. Abdullaev, Y. V. Kartashov, V. V. Konotop, D. A. Zezyulin, "Solitons in PT-symmetric nonlinear lattices", *Phys. Rev. A*, **83**:4 (2011), 041805, 4 pp., arXiv: 1104.0276.

[46] I. V. Barashenkov, "Hamiltonian formulation of the standard $\mathcal{PT}$-symmetric nonlinear Schrödinger dimer", *Phys. Rev. A*, **90**:4 (2014), 045802, 4 pp.

[47] A. Fring, "$\mathcal{PT}$-symmetric deformations of integrable models", *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **371**:1989 (2013), 20120046, 18 pp.

[48] А. А. Зябловский, А. П. Виноградов, А. А. Пухов, А. В. Дорофеенко, А. А. Лисянский, "PT-симметрия в оптике", *УФН*, **184**:11 (2014), 1177–1198.

[49] C. M. Bender, S. Boettcher, "Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having $\mathcal{PT}$ symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, **80**:24 (1998), 5243–5246; C. M. Bender, S. Boettcher, P. N. Meisinger, "$\mathcal{PT}$-Symmetric quantum Mechanics", *J. Math. Phys.*, **40**:5 (1999), 2201–2229, arXiv: quant-ph/9809072.

[50] A. Mostafazadeh, "Pseudo-hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian", *J. Math. Phys.*, **43**:1 (2002), 205–214, arXiv: math-ph/0107001; "Pseudo-hermiticity versus $\mathcal{PT}$-symmetry. II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with a real spectrum", **43**:5 (2002), 2814–2816, arXiv: math-ph/0110016; "Pseudo-hermiticity versus $\mathcal{PT}$-Symmetry. III: equivalence of pseudo-Hermiticity and the presence of antilinear symmetries", 3944–3951, arXiv: math-ph/0203005.

[51] C. M. Bender, "Making sense of non-Hermitian Hamiltonians", *Rep. Progr. Phys.*, **70**:6 (2007), 947–1018, arXiv: hep-th/0703096.

[52] A. Mostafazadeh, "Pseudo-Hermiticity and generalized $\mathcal{PT}$- and $\mathcal{CPT}$-symmetries", *J. Math. Phys.*, **44**:3 (2003), 974–989, arXiv: math-ph/0209018; "Exact $\mathcal{PT}$-Symmetry is equivalent to Hermiticity", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:25 (2003), 7081–7091, quant-ph/0304080.

[53] В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Р. И. Иванов, "N-волновые уравнения с $\mathcal{PT}$-симметрией", *ТМФ*, **188**:3 (2016), 397–415.

[54] C. E. Rüter, K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, M. Segev, D. Kip, "Observation of parity-time symmetry in optics", *Nature Phys.*, **6** (2010), 192–195.

[55] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, "Multi-component NLS models on symmetric spaces: spectral properties versus representations theory", *SIGMA*, **6** (2010), 044, 29 pp., arXiv: 1006.0301.

[56] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov, "Reductions of N-wave interactions related to low-rank simple Lie algebras. I. $\mathbb{Z}_2$-reductions", *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:44 (2001), 9425–9461, arXiv: nlin.SI/0006001.

[57] V. S. Gerdjikov, P. P. Kulish, "The generating operator for the $n\times n$ linear system", *Phys. D*, **3**:3 (1981), 549–564.

[58] E. V. Doktorov, S. B. Leble, *A Dressing Method in Mathematical Physics*, Mathematical Physics Studies, **28**, Springer, Dordrecht, 2007.

[59] M. J. Ablowitz, X.-D. Luo, Z. H. Musslimani, "Inverse scattering transform for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions", *J. Math. Phys.*, **59**:1 (2018), 011501, 42 pp., arXiv: 1612.02726.

[60] M. Li, T. Xu, "Dark and antidark soliton interactions in the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with the self-induced parity-time-symmetric potential", *Phys. Rev. E*, **91**:3 (2015), 033202, 8 pp.

[61] M. Li, T. Xu, D. Meng, "Rational solitons in the parity-time-symmetric nonlocal nonlinear Schrödinger model", *J. Phys. Soc. Japan*, **85** (2016), 124001, 9 pp., arXiv: 1503.02254.

[62] B. Prinari, F. Vitale, "Inverse scattering transform for the focusing Ablowitz–Ladik system with nonzero boundary conditions", *Stud. Appl. Math.*, **137**:1 (2016), 28–52.

[63] V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, R. I. Ivanov, "On integrable wave interactions and Lax pairs on symmetric spaces", *Wave Motion*, **71** (2017), 53–70.

[64] M. Gürses, "Nonlocal Fordy–Kulish equations on symmetric spaces", *Phys. Lett. A*, **381**:21 (2017), 1791–1794.